

銘傳大學八十八學年度管理科學研究所碩士班招生考試

第一節

微積分 試題

1. 試證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = 0$ (5%)
2. 試求下列的極限 (20%)
 - (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$
 - (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_a^{a+x} \frac{dt}{t + \sqrt{t^2 + 1}}$ (不准利用羅必達法則(I'Hospital's Rule))
 - (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2}^{x^3} \sqrt{t^4 + 1} dt}{x^3}$
 - (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ (不准利用羅必達法則)
3. (1) 試說明均值定理(Mean value Theorem) (5%)
(2) 試利用均值定理 $57/8 < \sqrt{51} < 50/7$ (5%)
4. (1) 試導出 $\int \sin^n x dx$ 的簡化公式，此處 n 為正整數。(5%)
(2) 試利用(1)的結果求 $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$ 之值。(5%)
5. 試求下列各積分
 - (1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$
 - (2) $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x}$
6. 計算 $\iint_R \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy dx$ ，此處 R 為位於第一象限內在圓 $x^2 + y^2 = 1$ 內的區域。(10%)

7. 令 $f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right), & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ，試求(1) $f_{xx}(0, 0)$ (2) $f_{yy}(0, 0)$

(10%)

8. 假設對某製造過程，柯布道格拉斯生產函數(Cobb-Douglas Production function)定義為

$$f(x, y) = 200x^{3/4}y^{1/4}$$

此處 x 代表勞動單位數量且 y 代表資本單位數量。如果一單位之勞動成本為 250 元，一單位之資本成本為 400 元，且全部之開銷限制為 120,000 元，試求最大之生產水準。(15%)

試題完